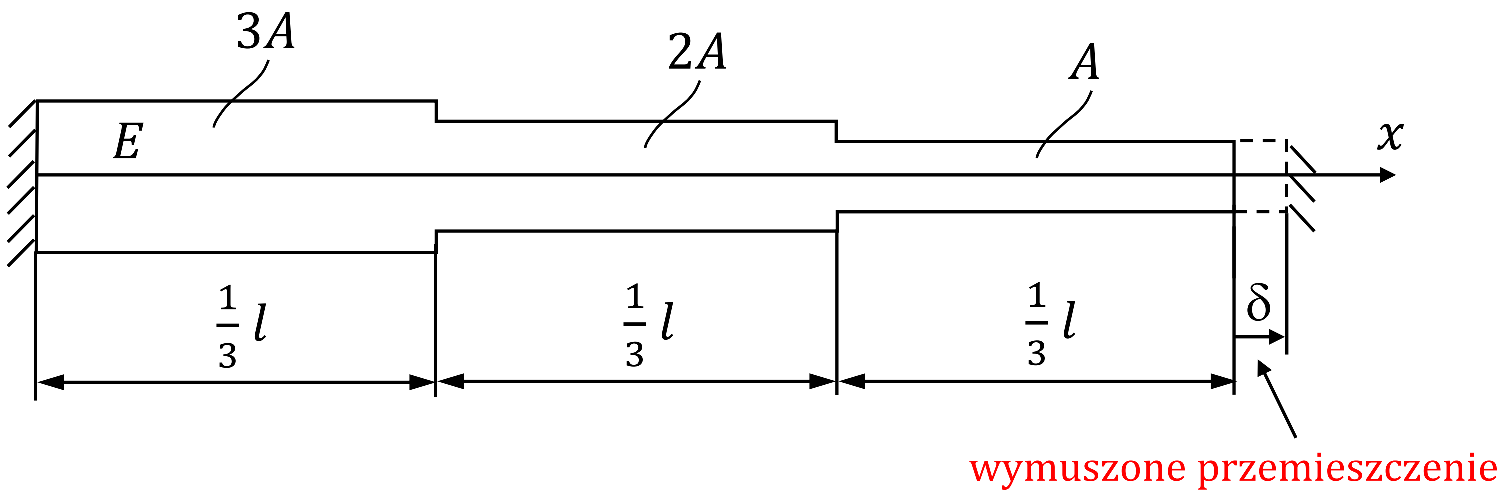
Politechnika Warszawska | Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa | Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

Metoda elementów skończonych (MES1)

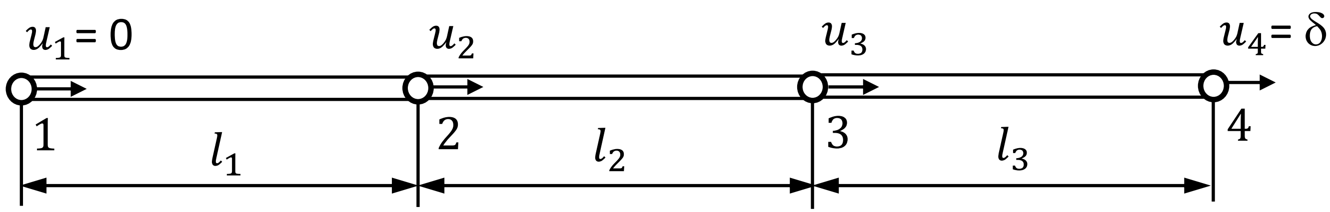
Wykład 7B. Wymuszone przemieszczenie i zadane obciążenie

04.2022

Model MES pręta z wymuszonym przemieszczeniem

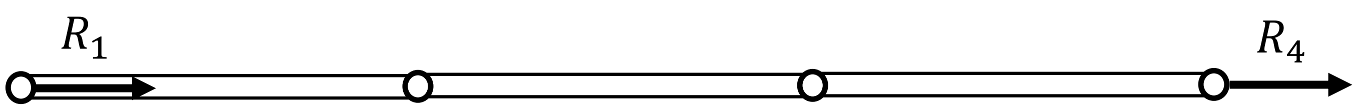


Model MES– 3 elementy prętowe:



$$\underset{1\times 4}{\lfloor q \rfloor} = \lfloor u_1, u_2, u_3, u_4 \rfloor$$

Model uwolniony od więzów:



$$\underset{1\times 4}{\lfloor F \rfloor} = \lfloor R_1, 0{,}0, R_4 \rfloor \qquad (R_1 + R_4 = 0)$$

Model MES pręta z wymuszonym przemieszczeniem

macierze sztywności:

$$\underset{2\times 2}{[k]_e} = \frac{EA_e}{l_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{2\times 2}{[k]_1} = \frac{E\cdot 3A}{\frac{1}{3}l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\underset{2\times 2}{[k]_2} = \frac{E\cdot 2A}{\frac{1}{3}l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\underset{2\times 2}{[k]_3} = \frac{EA}{\frac{1}{3}l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{4\times 4}{[k]_1^*} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 9 & -9 & 0 & 0 \\ -9 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \underset{4\times 4}{[k]_2^*} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{4\times 4}{[k]_3^*} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \underset{4\times 4}{[K]} = \sum_{e=1}^{3} [k]_e^* = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 9 & -9 & 0 & 0 \\ -9 & 15 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Model MES pręta z wymuszonym przemieszczeniem

układ równań: $\underset{4\times 4}{[K]}\cdot\underset{4\times 1}{\{q\}} = \underset{4\times 1}{\{F\}}$

$$\underset{4\times 4}{[K]}\cdot\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{Bmatrix} = \underset{4\times 4}{[K]}\cdot\left(\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\\delta\end{Bmatrix}\right) = \underset{4\times 4}{[K]}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\0\end{Bmatrix} + \underset{4\times 4}{[K]}\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\\delta\end{Bmatrix} = \underset{4\times 1}{\{F\}}$$

$$\underset{4\times 4}{[K]}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\0\end{Bmatrix} = \underset{4\times 1}{\{F\}} - [K]\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\\delta\end{Bmatrix} = \underset{4\times 1}{\{F\}} - \frac{EA}{l}\begin{bmatrix}9 & -9 & 0 & 0\\-9 & 15 & -6 & 0\\0 & -6 & 9 & -3\\0 & 0 & -3 & 3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\\delta\end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix}R_1\\0\\0\\R_4\end{Bmatrix} - \frac{EA}{l}\begin{Bmatrix}0\\0\\-3\delta\\3\delta\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}R_1\\0\\\frac{3EA}{l}\delta\\R_4-\frac{3EA}{l}\delta\end{Bmatrix} \quad\rightarrow\quad \underset{4\times 4}{[K]}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\0\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}R_1\\0\\\frac{3EA}{l}\delta\\R_4-\frac{3EA}{l}\delta\end{Bmatrix}$$

Model MES pręta z wymuszonym przemieszczeniem

Warunki brzegowe: $u_1 = 0$

$$\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 9 & -9 & 0 & 0 \\ -9 & 15 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ \frac{3EA}{l}\delta \\ R_4 - \frac{3EA}{l}\delta \end{Bmatrix}$$

u_2 , u_3 - niewiadome parametry

$$\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 15 & -6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{3EA}{l}\delta \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 15 & -6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3\delta \end{Bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} 15 & -6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix} = 15 \cdot 9 - (-6)(-6) = 99 \quad ; \begin{bmatrix} 15 & -6 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}^{CT} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$$

Model MES pręta z wymuszonym przemieszczeniem

przemieszczenia:

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{99}\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 15 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 3\delta \end{Bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{99}(9 \cdot 0 + 6 \cdot 3\delta) = \frac{18\delta}{99} = \frac{2\delta}{11}$$

$$u_3 = \frac{1}{99}(6 \cdot 0 + 15 \cdot 3\delta) = \frac{45\delta}{99} = \frac{5\delta}{11}$$

$$N_1(\xi) = 1 - \frac{\xi}{l_e} = 1 - \frac{3\xi}{l} \; ; \qquad N_2(\xi) = \frac{\xi}{l_e} = \frac{3\xi}{l}$$

$$u(\xi) = \lfloor N_1, N_2 \rfloor \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e \quad \rightarrow \quad \varepsilon_x = \frac{du}{d\xi} = \left\lfloor \frac{dN_1}{d\xi}, \frac{dN_2}{d\xi} \right\rfloor \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e = \left\lfloor -\frac{3}{l}, \frac{3}{l} \right\rfloor \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_e$$

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix}_1 \quad ; \quad \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}_2 \quad ; \quad \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}_3 = \begin{Bmatrix} u_3 \\ \delta \end{Bmatrix}_3$$

Model MES pręta z wymuszonym przemieszczeniem

odkształcenie w elementach:

$$\varepsilon_{x1} = \left\lfloor -\frac{3}{l}, \frac{3}{l} \right\rfloor \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix}_1 = -\frac{3}{l} \cdot 0 + \frac{3}{l} \cdot u_2 = \frac{6\delta}{11l}$$

$$\varepsilon_{x2} = \left\lfloor -\frac{3}{l}, \frac{3}{l} \right\rfloor \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}_2 = -\frac{3}{l} \cdot u_2 + \frac{3}{l} \cdot u_3 = \frac{9\delta}{11l}$$

$$\varepsilon_{x3} = \left\lfloor -\frac{3}{l}, \frac{3}{l} \right\rfloor \begin{Bmatrix} u_3 \\ \delta \end{Bmatrix}_3 = -\frac{3}{l} \cdot u_3 + \frac{3}{l} \cdot \delta = \frac{18\delta}{11l}$$

Naprężenie w elementach:

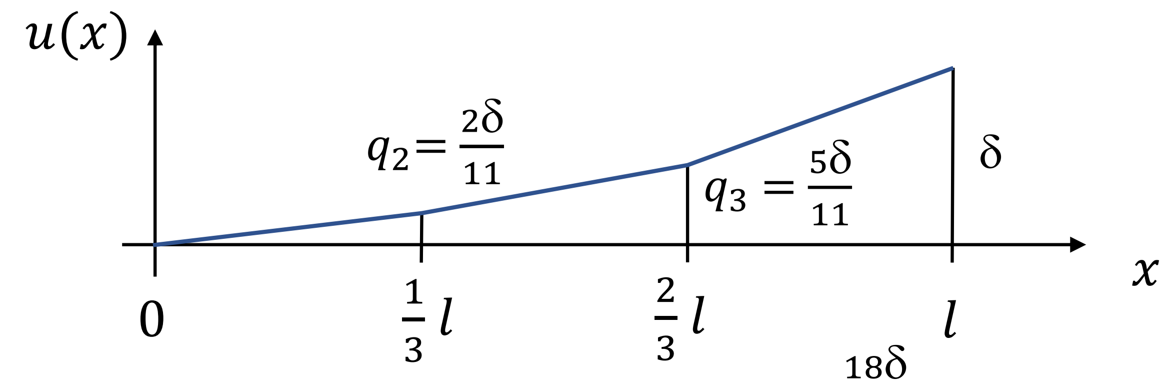
$$\sigma_{x1} = E \cdot \varepsilon_{x1} = \frac{6E\delta}{11l}$$

$$\sigma_{x2} = E \cdot \varepsilon_{x2} = \frac{9E\delta}{11l}$$

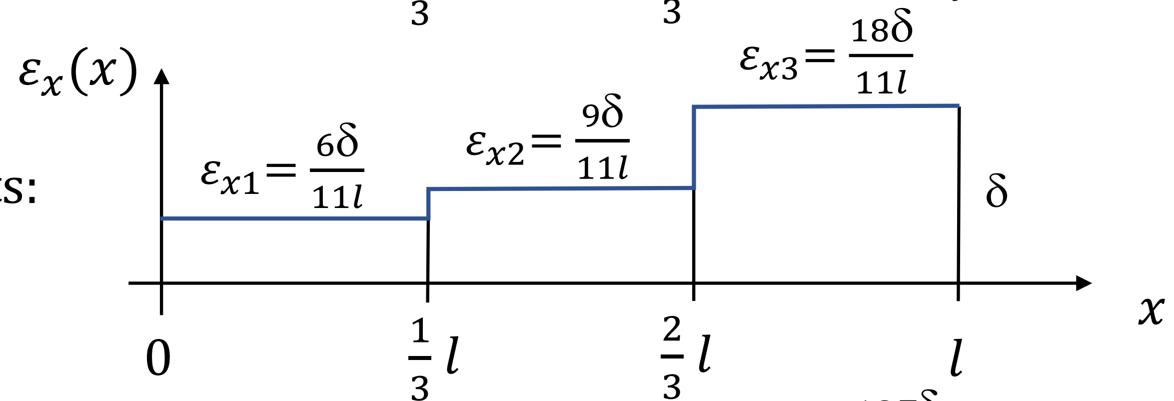
$$\sigma_{x3} = E \cdot \varepsilon_{x3} = \frac{18E\delta}{11l}$$

Model MES pręta z wymuszonym przemieszczeniem

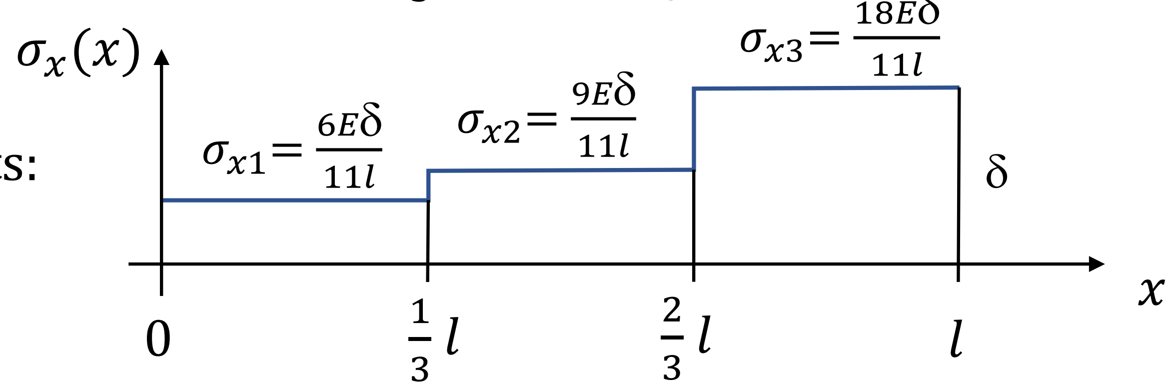
DOF solution:



Strain in elements:

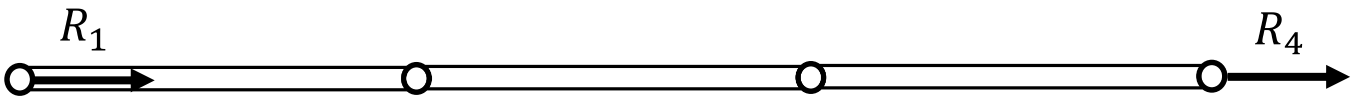


Stress in elements:



Model MES pręta z wymuszonym przemieszczeniem

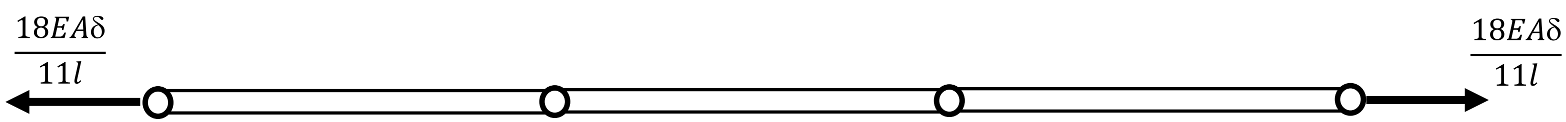
reakcje:



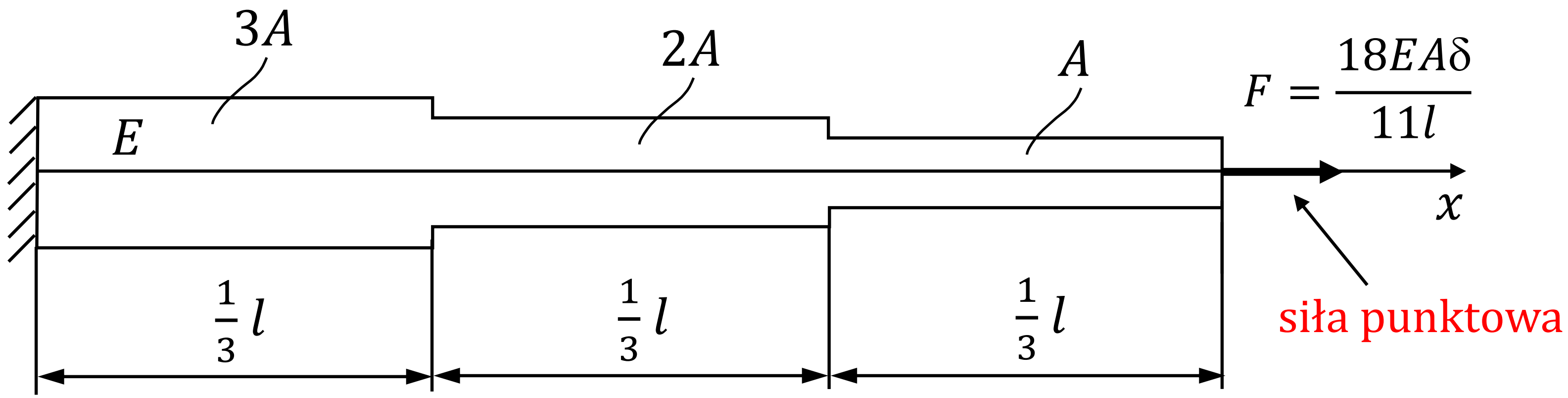
$$\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 9 & -9 & 0 & 0 \\ -9 & 15 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{2\delta}{11} \\ \frac{5\delta}{11} \\ \delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \\ R_4 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{EA}{l}\left(9 \cdot 0 - 9 \cdot \frac{2\delta}{11} + 0 \cdot \frac{5\delta}{11} + 0 \cdot \delta\right) = R_1 \quad \rightarrow \quad R_1 = -\frac{18EA\delta}{11l}$$

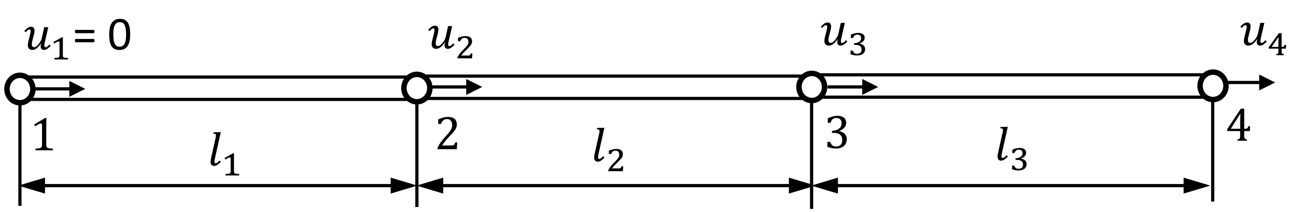
$$\frac{EA}{l}\left(0 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{2\delta}{11} - 3 \cdot \frac{5\delta}{11} + 3 \cdot \delta\right) = R_4 \quad \rightarrow \quad R_4 = \frac{18EA\delta}{11l}$$



Model MES pręta obciążonego siłą

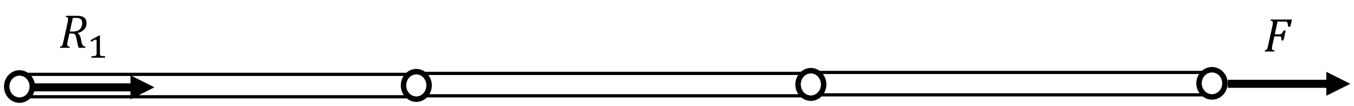


Model MES dla 3 elementów:



$$\lfloor q \rfloor_{1\times 4} = \lfloor u_1, u_2, u_3, u_4 \rfloor$$

Model uwolniony od więzów:



$$\lfloor F \rfloor_{1\times 4} = \lfloor R_1, 0, 0, F \rfloor \qquad (R_1 + F = 0)$$

Model MES pręta obciążonego siłą

warunki brzegowe: $u_1 = 0$

$$\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 9 & -9 & 0 & 0 \\ -9 & 15 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \\ F \end{Bmatrix}$$

u_2 , u_3 , u_4 - nieznane parametry węzłowe

$$\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 15 & -6 & 0 \\ -6 & 9 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{18EA\delta}{11l} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 15 & -6 & 0 \\ -6 & 9 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{18\delta}{11} \end{Bmatrix}$$

Model MES pręta obciążonego siłą

$$\det\begin{bmatrix}15 & -6 & 0\\ -6 & 9 & -3\\ 0 & -3 & 3\end{bmatrix} =$$

$$= 15\cdot(9\cdot 3-(-3)(-3))-(-6)\cdot\big((-6)\cdot 3-(-3)\cdot 0\big) = 162$$

$$\begin{bmatrix}15 & -6 & 0\\ -6 & 9 & -3\\ 0 & -3 & 3\end{bmatrix}^{CT} = \begin{bmatrix}18 & 18 & 18\\ 18 & 45 & 45\\ 18 & 45 & 99\end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}u_2\\ u_3\\ u_4\end{Bmatrix} = \frac{1}{162}\begin{bmatrix}18 & 18 & 18\\ 18 & 45 & 45\\ 18 & 45 & 99\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ \frac{18\delta}{11}\end{Bmatrix}$$

Model MES pręta obciążonego siłą

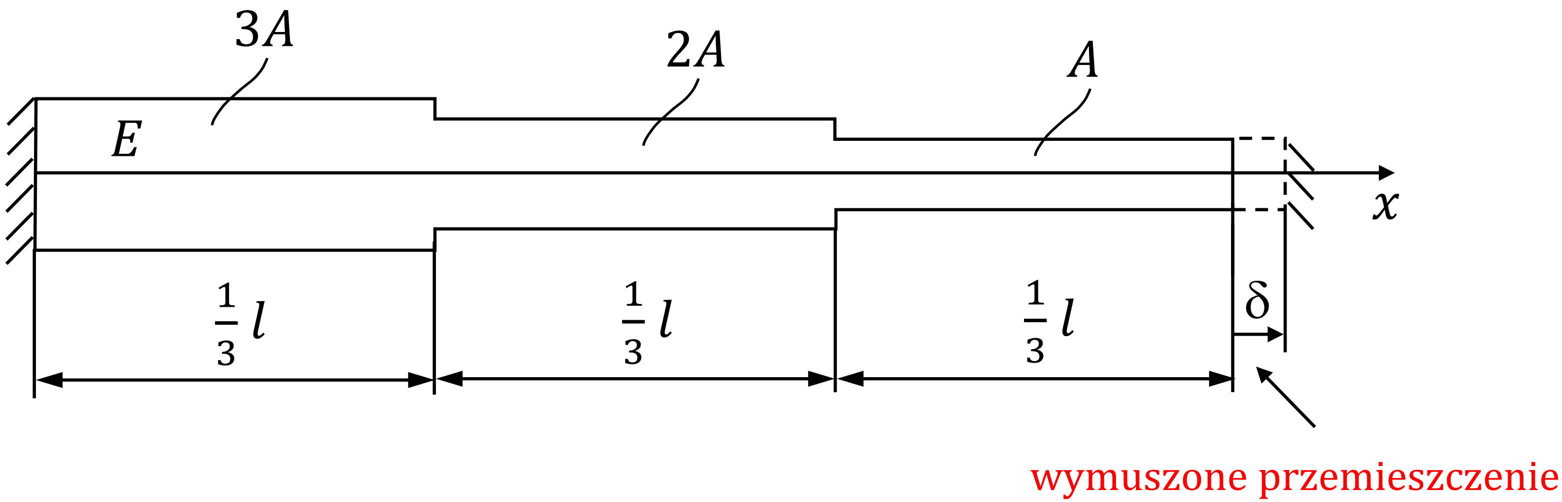
$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{162}\begin{bmatrix} 18 & 18 & 18 \\ 18 & 45 & 45 \\ 18 & 45 & 99 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{18\delta}{11} \end{Bmatrix}$$

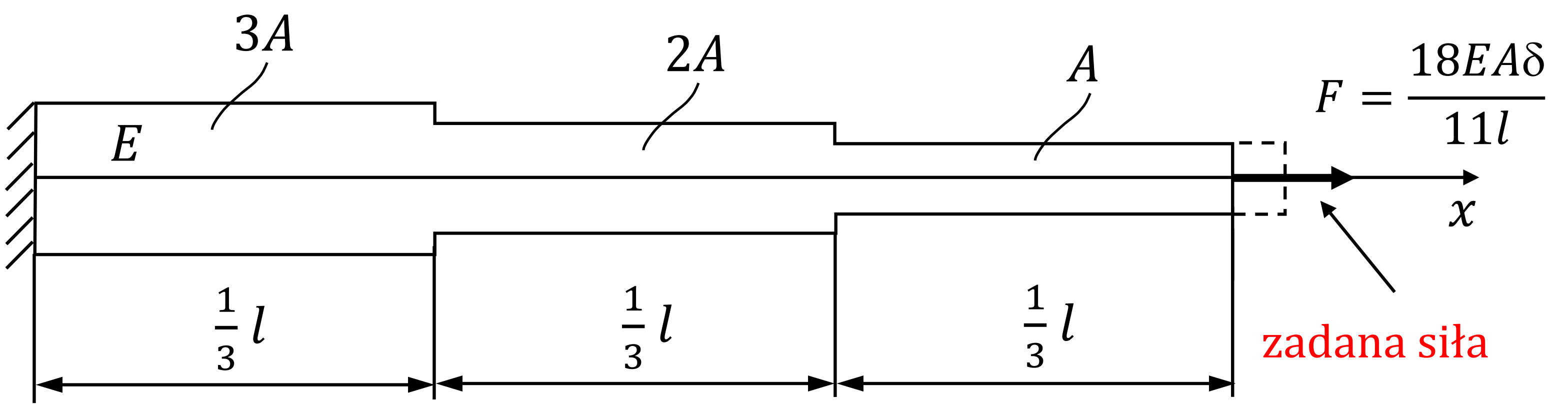
$$u_2 = \frac{1}{162}\left(18 \cdot 0 + 18 \cdot 0 + 18 \cdot \frac{18\delta}{11}\right) = \frac{18 \cdot 18\,\delta}{162 \cdot 11} = \frac{18 \cdot 9 \cdot 2\,\delta}{18 \cdot 9 \cdot 11} = \frac{2\delta}{11}$$

$$u_3 = \frac{1}{162}\left(18 \cdot 0 + 45 \cdot 0 + 45 \cdot \frac{18\delta}{11}\right) = \frac{45 \cdot 18\,\delta}{162 \cdot 11} = \frac{5 \cdot 9 \cdot 18\,\delta}{18 \cdot 9 \cdot 11} = \frac{5\delta}{11}$$

$$u_4 = \frac{1}{162}\left(18 \cdot 0 + 45 \cdot 0 + 99 \cdot \frac{18\delta}{11}\right) = \frac{99 \cdot 18\,\delta}{162 \cdot 11} = \frac{11 \cdot 9 \cdot 18\,\delta}{18 \cdot 9 \cdot 11} = \frac{11\delta}{11} = \delta$$

Dwa typy obciążeń dające ten sam wynik





Porównanie obu zadań

typ obciążenia	układ równań MES	N
Wymuszone przemieszczenie δ	$\frac{EA}{l}\begin{bmatrix}15 & -6\\ -6 & 9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_2\\ u_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ \frac{3EA}{l}\delta\end{Bmatrix}$ $cond\left(\begin{bmatrix}15 & -6\\ -6 & 9\end{bmatrix}\right)=4.45$	2
Siła $F=\frac{18EA\delta}{11l}$	$\frac{EA}{l}\begin{bmatrix}15 & -6 & 0\\ -6 & 9 & -3\\ 0 & -3 & 3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_2\\ u_3\\ u_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ \frac{18EA\delta}{11l}\end{Bmatrix}$ $cond\left(\begin{bmatrix}15 & -6 & 0\\ -6 & 9 & -3\\ 0 & -3 & 3\end{bmatrix}\right)=21$	3

Condition number: $cond([K])\approx 1$ – problem well conditioned, $(cond)\gg 1$ – ill conditioned

(Wskaźnik uwarunkowania macierzy)

$$cond([K]) = \|K\|_\infty \cdot \|K^{-1}\|_\infty$$

https://pl.wikipedia.org/wiki/Wska%C5%BAnik_uwarunkowania

Wskaźnik uwarunkowania macierzy A w równaniu $Ax = b$ jest charakterystyczną własnością macierzy informującą o tym, jakie wzmocnienie będzie miała zmiana normy macierzy A na normę rozwiązania x.

Wskaźnik uwarunkowania macierzy definiuje się bardziej precyzyjnie jako maksymalny stosunek błędu względnego wektora rozwiązania x do błędu względnego b.

Załóżmy, że e jest błędem b. Stąd błąd w rozwiązaniu $A^{-1}b$ wynosi $A^{-1}e$. Stąd stosunek relatywnego błędu rozwiązania do relatywnego błędu w b wynosi:

$$\frac{\|A^{-1}e\|/\|A^{-1}b\|}{\|e\|/\|b\|}.$$

Można to przekształcić do:

$$(\|A^{-1}e\|/\|e\|)\cdot(\|b\|/\|A^{-1}b\|).$$

Maksymalna wartość (dla niezerowych b i e) będzie iloczynem dwóch norm (definiowanych w różny sposób, np. często jako normę traktuje się maksymalną sumę wartości bezwzględnych wierszy):

$$\kappa(A) = \|A^{-1}\|\cdot\|A\|.$$

Definicja ta jest taka sama dla każdej zwartej normy. Liczba ta pojawia się tak często w algebrze liniowej, że nadano jej nazwę **wskaźnika uwarunkowania macierzy**.

Zastosowania [edytuj | edytuj kod]

Wskaźnik uwarunkowania macierzy pozwala na oszacowanie, z jaką (maksymalnie) dokładnością (do ilu miejsc po przecinku) możemy podać wynik. Dokładność jest zależna od iloczynu epsilonu maszynowego i wskaźnika uwarunkowania. Załóżmy dla przykładu, że mamy macierz $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Stosując tak zdefiniowaną normę: $\|A\| = max_{1<i<n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$ możemy obliczyć wskaźnik uwarunkowania $\kappa(A) = \|A^{-1}\|\cdot\|A\| = 21.$

Załóżmy dodatkowo, że mamy do czynienia z maszyną, która przechowuje liczby rzeczywiste używając 24-bitowej mantysy, wtedy epsilon maszynowy wynosi $\varepsilon_{masz} = 2^{1-24} = 0{,}119209\cdot 10^{-6}$. Po pomnożeniu tych wartości możemy oszacować do ilu miejsc po przecinku otrzymany wynik będzie istotny na podstawie poniższej równości:

$$5\cdot 10^{-m} = 0{,}25\cdot 10^{-7}.$$

Obliczając m, możemy wnioskować, że w tym przypadku dokładność wyniesie 6 miejsc po przecinku.